

القسم: رياضيات السنة: الرابع / المادة: جبر / المحاضرة: الجبر

تعريف:

ليكن A حيز فضاء المتجهات R

$$Z(A) = \{a : a \in A ; [a, x] = 0 \quad \forall x \in A\}$$

مركز A

تعريف:

ليكن A حيز فضاء المتجهات R و S مجموعة جزئية من A ونريد طالية. نسمي المجموعة

$$Z(S) = \{a : a \in A ; [a, x] = 0 \quad \forall x \in S\}$$

مركز S في A

لمجموعة:

ليكن A حيز فضاء المتجهات R و I مثالي في A عندها المجموعة

$$Z(I) = \{a : a \in A ; [a, x] = 0 \quad \forall x \in I\}$$

مركز I في A

البرهان:

بما أن

$$\forall x \in I \quad [0, x] = 0 \Rightarrow 0 \in Z(I) \Rightarrow 0 \neq Z(I) \subseteq A$$

$$\forall a, b \in Z(I) \Rightarrow [a, x] = 0 \quad \forall x \in I$$

$$[b, x] = 0$$

$$[a-b, x] = [a, x] - [b, x] = 0 - 0 = 0 \Rightarrow a-b \in Z(I)$$

$$\forall \lambda \in R \Rightarrow [\lambda a, x] = \lambda [a, x] = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda a \in Z(I)$$

$$\forall a \in A \Rightarrow d_a(Z(I)) \subseteq Z(I) \quad \forall c \in Z(I)$$

$$d_a(c) \in Z(I)$$

$$\forall x \in I \Rightarrow [d_a(c), x] = [[a, c], x] = 0$$

{

$$[x, [a, c]] + [a, [c, x]] + [c, [x, a]] = 0$$

$$[[a, c], x] = [a, \underbrace{[c, x]}_{=0}] + [\underbrace{c}_{\in A}, [x, a]]$$

$$= [a, 0] + 0 = 0 + 0 = 0$$

تبرهن:

لكن $f: A \rightarrow B$ دالة جبرية في A ونقول ان I مثالية في A عندئذ $f(I)$ مثالية في B

البرهان:

لنأخذ I مثالية جزئية في A و $f(I) \subseteq B$ مثالية جزئية في B

$$\forall a \in A, d_a(f(I)) \subseteq f(I)$$

$$\forall c \in f(I), d_a(c) \in f(I) \quad \text{نريد ان نثبت:}$$

$$d_a(c) = [a, c]$$

$$a = f(x), x \in A \text{ حيث } a \in B$$

$$c = f(y), y \in I \text{ حيث } c \in f(I)$$

$$d_a(c) = [a, c] = [f(x), f(y)] = f([x, y]) = f(d_x(y)) \in f(I)$$

وهذا يثبت ان $f(I)$ مثالية في B

تعريف:

لكن A جبرية فوق الحلقة R و I مثالية جزئية في A ونقول ان I مثالية محسنة في A اذا $I \subseteq Z(A)$

(1) I مثالية جزئية في I

$$d \in \text{Der}(A) \text{ و } d(I) \subseteq I$$

نتبع مباشرة من التعريف ان كل مثالية محسنة في A هي مثالية في A

انما ان I مثالية في A و I مثالية محسنة في A

تعميد:
 لكن A حرة فوق الحقل R ، a مركز A ، $Z(A)$ مثلي جزئي في A

البرهان:

دعنا نثبت أولاً $\{a \in A \mid [a, x] = 0 \ \forall x \in A\}$ هو مركز A ،
 لكن $Der(A) = \{d \in D(A) \mid d(xy) = d(x)y + x d(y)\}$

$$d(Z(A)) \subseteq Z(A)$$

أي نثبت أنه إذا $a \in Z(A)$ ، $d(a) \in Z(A)$

$$\forall x \in A : [d(a), x] = 0 \quad ??$$

$$d([a, x]) = [d(a), x] + [a, d(x)] \quad \text{لأن}$$

$$[d(a), x] = d([a, x]) - [a, d(x)] \quad \text{ومن}$$

$$= d(0) - 0 = 0$$

ومن هنا $d(a) \in Z(A)$ وبالتالي $Z(A)$ مثلي جزئي في A

تمرين:

لكن A حرة فوق الحقل R ، I, J مثليين غير صفريين في A ، $I \cap J$ مثلي جزئي في A

$$I + J \text{ مثلي جزئي في } A$$

الحل:

دعنا نثبت أن $I + J$ هو مركز A ، $I \cap J$ هو مركز A ، $I + J$ هو مركز A

$$\forall d \in Der(A) : d(I + J) \subseteq I + J \quad ??$$

$$x = a + b, \ a \in I, \ b \in J, \ c \in I \cap J, \ d(x) = d(a) + d(b) \in I + J$$

$$d(c) = d(ca) = d(c)a + c d(a) \in I + J$$

ومن هنا $I + J$ مثلي جزئي في A

دعنا نثبت أن $I \cap J$ هو مركز A ، I, J هو مركز A ، $I \cap J$ هو مركز A

$$\forall d \in Der(A) : d(I \cap J) \subseteq I \cap J \quad ??$$

لكن $a \in \mathbb{I} \cap \mathbb{J}$ عنده $a \in \mathbb{I}$

$$a \in \mathbb{I} \Rightarrow d(a) \in \mathbb{I}$$

$$a \in \mathbb{J} \Rightarrow d(a) \in \mathbb{J}$$

$$\Rightarrow d(a) \in \mathbb{I} \cap \mathbb{J}$$

وهذا $\mathbb{I} \cap \mathbb{J}$ مثالي محلي

تعريف:

ليكن M مودول جزئي فوق الحلقة R ، و X مجموعة جزئية غير خالية من M . M تسمى X مودول جزئي M يحوي X لفرز X له بالحد $\langle X \rangle$ وهو أصغر مودول جزئي من M يحوي X .

تمرية:

ليكن A حيزي فوق الحلقة R ، \mathbb{I} مثاليين من A تسمى الجدة

$$L = \{ [x, y] \mid x \in \mathbb{I}, y \in \mathbb{J} \}$$

$$L \subset A, \phi \neq L, 0 \in [0, 0]$$

تسمى المودول الجزئي L المولد بالمجموعة L والذي هو أصغر مودول جزئي من A يحوي L ولننزل

$$[L, \mathbb{I}] = \langle L \rangle$$

$$[\mathbb{I}, \mathbb{J}] = [\mathbb{J}, \mathbb{I}]$$

تمرية:

ليكن A حيزي فوق الحلقة R ، و \mathbb{I}, \mathbb{J} مثاليين من A عنده:

$$[\mathbb{I}, \mathbb{J}] = [\mathbb{J}, \mathbb{I}] \quad (1)$$

$$A \text{ يحوي } [\mathbb{I}, \mathbb{J}] \quad (2)$$

البرهان:

نفرق:

$$L_1 = \{ [x, y] \mid x \in \mathbb{I}, y \in \mathbb{I} \}$$

$$L_2 = \{ [y, x] \mid y \in \mathbb{J}, x \in \mathbb{I} \}$$

$$L_1 = L_2$$

لكن $a \in \mathcal{L}_1$ عنده $a = [x, y]$ حيث $x \in I$ و $y \in J$ ومفاتيح

$$a = [x, y] = -[y, x] = [\underbrace{-y}_{\in J}, \underbrace{x}_{\in I}] \in \mathcal{L}_2$$

وبذلك $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \iff \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$ وبطريقة متبادلة في $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$ وبذلك
 $\langle \mathcal{L}_1 \rangle = \langle \mathcal{L}_2 \rangle$

$$[I, J] = \langle \mathcal{L}_1 \rangle = \langle \mathcal{L}_2 \rangle = [J, I]$$

نلاحظ $\forall a \in A \quad d_a([I, J]) \subseteq [I, J]$ (نلاحظ)
 لا بد ذلك لنلاحظ

$$d_a(\mathcal{L}_1) \subseteq \langle \mathcal{L}_2 \rangle$$

لكن $b \in \mathcal{L}_1$ عنده $b = [x, y]$ حيث $x \in I$ و $y \in J$

$$\begin{aligned} d_a(b) &= d_a([x, y]) \in \mathcal{L}_2 \\ &= [\underbrace{d_a(x)}_{\in I}, \underbrace{d_a(y)}_{\in J}] \in \langle \mathcal{L}_1 \rangle = [I, J] \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_1 \subseteq \langle \mathcal{L}_1 \rangle \quad \mathcal{L}_1 \subseteq \langle \mathcal{L}_1 \rangle$$

استنتجنا ان